数理解析研究所講究録
第1636巻 2009年 169-176

AHPにおける一対比較値の評点化過程について

愛知学院大学経営学部　田中浩光（Hiromitsu Tanaka）
Faculty of Management
Aichi-Gakuin University

1．はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process）方式では、一対比較における対象項目の重要度の推定に、提唱者であるサーティ(Saaty,T,L.)の固有値法が用いられる。重要度は、一対比較値からなる行列（以下、一対比較値行列）をもとに推定されるため、その推定性能は一対比較値行列の信頼性に依存する。一対比較値には、評点化の際に生じる評価者固有のバラツキに加えて、比尺度性に伴う逆数対称化、評点付けの際の離散化などAHP方式に依拠する偏りが含まれることに注意を要する（田中(2007a))。したがって、一対比較値に影響を及ぼす多くの要因が交絡すること、また一対比較値の個数が少ないこともあり、統計的接近に基づく信頼性の点検は難しく、実践では一対比較値行列の整合性診断として、その点検方法に固有値解法と密接に関係するサーティのC.I.(Consistency Index)基準が用いられるのが通常である。C.I.の有用性については数値実験も含めた性能評価の研究がみられる。C.Iは、評点上の整合性（サーティの意味で）を問う指標ではあるが、評価者固有の潜在的な重要度に対する乖離を評価するものでないことに注意が要る(Saaty(1980)、仁科・柴山(1992)、小澤(2004)など)。また、AHP方式による評点(以下、サーティ方式の評点)は、重みの推定性能に対し、必ずしも良好に作動していないことが指摘されている(田中(2007a),田中(2007b), 田中(2008a),田中(2008b)など)。

本稿では、人工的な数値例の吟味を通して評点化、とりわけ評点の離散性と値域の有界性が推定性能に及ぼす影響を探ることに主眼をおく。併せて、評価者が保有する重要度(以下、重み)に基づく比尺度性の影響を考察・吟味する。

2節では、一対比較における評点付けの信頼性の確保を意図して、一対比較値の生成過程を考察する。とくに、評点付けの作業段階を経時的に図示する。また、重みの推定への定式化を考えて、母数としての重要度の概念を導入する。3節では、一対比較値の生成において、重みを母数とする誤差モデルを定式化する。以降での論旨の展開は、誤差モデルの基盤のもとで進められる。重みの推定はサーティの固有値解法を採用する。4節では、重みの推定性能に関連する評点に、強く影響を及ぼす離散化要因を整理する。6節で行う数値実験の設計に対する考え方を整理する。5節では、離散化が及ぼす評点への影響、重みの推定への影響に対する方策として、サーティ方式の1つの代替方式として、項目対の重みの大きさに着目する離散値表の適用を推奨する。6節では、人工的な数値例を与えて、評点の定義域・評点付けの離散化の影響を吟味する。評価基準には、重みの真値からの偏差平方和を取りあげる。対照に、サーティの整合性指標C.I.を採用する。離散値表に基づく評点がサーティ方式よりも良好であることを示唆する。7節では、今後の課題として、離散値表の作成に纏わる任意性について言及する。

2. 一対比較での評点化過程と重要度の導入

比較対象のn項目に対する一対比較では、下記の手順(1)、(2)を通して、一対比較値行列Aを得る。

$A = \{ a_{ij} \}$

ここに、$i,j = 1, \cdot \cdot \cdot, n$ に対し、

$$a_{ij}^{-1} = a_{ji} \quad , a_{ii} = 1 \qquad (1)$$

$$\max\{ a_{ij} , a_{ji} \} \in \{1, \cdot \cdot \cdot, 9\} \qquad (2)$$

評点 a_{ij} は、逆数対称化(1)、離散化(2)の縛りを受けることに留意する。AHP方式に付随する制約以外にも、評点 a_{ij} には、評点化に際しての過大・過小見積もり、一対比較の試行に起因するバラツキなど様々な撹乱要因を含む。一対比較値の評点化過程を図1に示す(田中(2008a)。

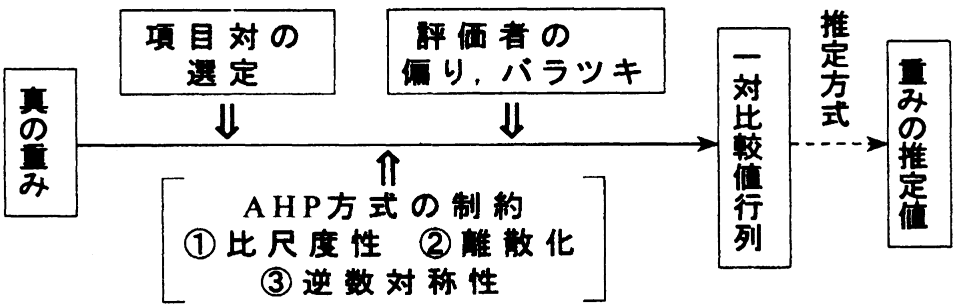

図1．AHPにおける一対比較での評点化過程

サーティによるAHPでは、次の2つの想定が重要である。 評価者の有する潜在的な重要度(重み) $\{w_i\}$ に基づいて、比尺度性のもとで項目対の相対評価 a_{ij} が行なわれる。

・比較対象のn項目に対し、真の重要度(重み)を導入する。

$W = \{w_i\}$

・比尺度性を想定する。

$a_{ij} = w_i / w_j$

3．誤差モデル、固有値解法とサーティの整合性指標 C.I.

本節では、一対比較値の生成の定式化を考える。図1を斟酌して、定式化には、真の重みと誤差を組み入れる。重要度(以降、重み)Wを変量ではなく母数として扱うことに留意する。すなわち、重み $W = \{w_i\}$ は、評価者固有の固定値であり、一対比較の実施に対し不変とする。

本稿では、以降、誤差モデルとして下記の式(4)を用いる。

$$\begin{aligned} a_{ij} &= T(f_0(W, E^O)) \qquad (3) \\ &= T(f_0(E^O \mid W)) \\ &\fallingdotseq T(f_1(\varepsilon^o_{ij} \mid w_i , w_j)) \\ &\cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

$\fallingdotseq \ (w_i \ / w_j) \cdot \varepsilon_{ij}$ (4)

ここに、$E^O=\{\varepsilon^o_{ij}\}$は評定に伴う(測定)誤差であり、$E=\{\varepsilon_{ij}\}$はAHP 方式に付随する制約（離散化など）の調整を含む誤差を表す。T は離散化関数であり、 f_0, f_1は、それぞれ未知関数である。$\{w_i\}$を母数として扱う。

重みの推定は、Saaty の固有値解法で得られるが、通常である。

〔固有値法〕

$AU_{max} \ = \ \lambda_{max} \cdot U_{max}$ (5)

ここに、λ_{max} : A の最大固有値、U_{max} : λ_{max}に対応する主固有ベクトル、$U_{max} = \{u_i\}$。

u_iを第 i 項目の重みとする。固有値法で求められた u_iを重みw_iの推定値と考える。

一対比較値の整合性の点検には、サーティの整合性指標 C.I.(Consistency Index)が用いられる。

$C.I. = (\lambda_{max} - n) / (n-1)$ (6)

このとき、誤差モデルにおいて、AHP 方式の根幹となる比尺度性とサーティの整合性は次のように書き下すことができる。

比尺度性 H_O : $a_{ij} = w_i / w_j$

サーティの整合性 H_{SO} : $a_{ij} = a_{ik} \ a_{kj}$

したがって、比尺度性がサーティの整合性を導くことがわかる。

$H_{SO} \supseteq H_O$

4．一対比較値の離散化の影響

本節では、一対比較値の評点化過程において離散化が及ぼす影響を考察する。評点化における各作業段階では比尺度性の強い縛りを受ける。

① 重み$\{w_i\}$を想定する。

② 重みの比w_i / w_j を離散化する。評点 a_{ij} は 1～9、1～9^{-1}に制限される。

③ 逆数対称性により、評点$\{a_{ij}\}$を得る。

評点化作業では、評価者の評定で過大・過小となる偏りとバラツキが生じることは知られている。本稿では、評点化過程での離散化作業を取りあげて、重み$\{w_i\}$の大きさに着目する。比較する項目対の重みの状況を、下記の 2 つの場合に分けて考える。

(1)小さい値（たとえば、いずれも 0.1 未満）であるとき、評点の定義域を有界とする制約が評点に影響を及ぼす。

(2)大きい値(たとえば、いずれも0.3以上)であるとき、評点付けの離散化が優劣の実態を反映しない。

上記の(1),(2)を有する代表的な重みの形状を、それぞれ図 3、図 4 に示す。ここに、項目数 n が 4 であり、横軸が項目番号で、縦軸が重みである。図 4 は、重みの対が大きい値の場合と小さい値の場合の混在を示す。各図の詳細は次のとおりである。図 2 では、項目 3 と項目 4 の比較で評点に離散化の影響(1)が生じる。図 3 では、項目 1 と項目 2 の比較で評点に離散化の影響(2)生じる。図 4 では、項目 1 と項目 2 の比較で評点に離散化の影響(2)が生じる。他方同時に、項目 3 と項目 4 の比較では評点に離散化の影響(1)が生じる。

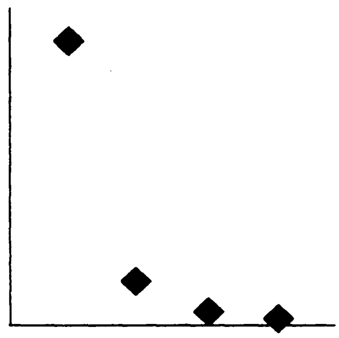

図 2．重みが小さい

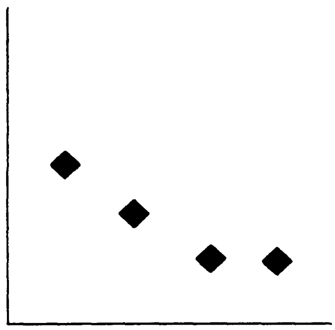

図 3.重みが大きい

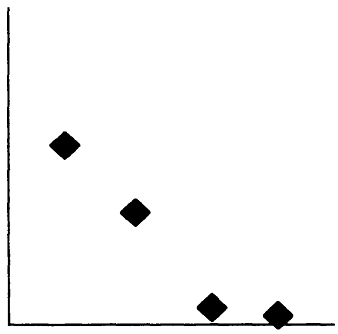

図 4.重みの大小の混在

5．離散値表

本節では、一対比較値の信頼性を確保する評点化を意図して、サーティ方式の評点化の代替となる 1 つの離散値表を作成する。4 節での①、②、③、すなわち比尺度性の縛りを強く考慮して評点化するとき、整合性(サーティの整合性の意味)を満足する一対比較値行列は多くないことが知られている（田中(2007a))。重みの推定においては、従来のサーティ方式に拘るのでなく、評点化、とりわけ離散化過程に重きをおく改良方法が望まれる。この考えに沿って、評点化過程の複雑性を吸収する 1 つの試みとして、離散値表の適用を提案する。以下、4 節で示した「項目対の重みの大きさ」に着目する、基本的な立場を説明する。

(1) 項目対の重みがいずれも小さいところでは、項目間に真の差を有していても、評価者には重み自体が小さいので、ほとんど差がないと考える。したがって、重みの小さいところでは、比例尺度性は作動せず、項目対の重みは同等に近いと判断する。

(2) 項目対の重みがいずれも大きいところでは、項目間に真に差を有して順序が存在しても、それらの重みの比の多くが実数値になるため、AHP 方式の制約から丸め作業で離散化する。したがって、サーティ方式の評点は、項目間が同等とする 1 になることが多い。この離散化の問題は、比尺度性が惹起していることに他ならない。

上記の立場に沿う離散値表の例を図 5 に示す。縦軸が 0.1 の刻みで 0 から 0.5 である。横軸が 0.1 の刻みで 0 から 1.0 である。評点は,重みの小さいところでは比尺度性から離れて 1 か 2 を与える。重みが大きいところでは、2 を与える。ここに、S はサーティ方式に基づく評点である。

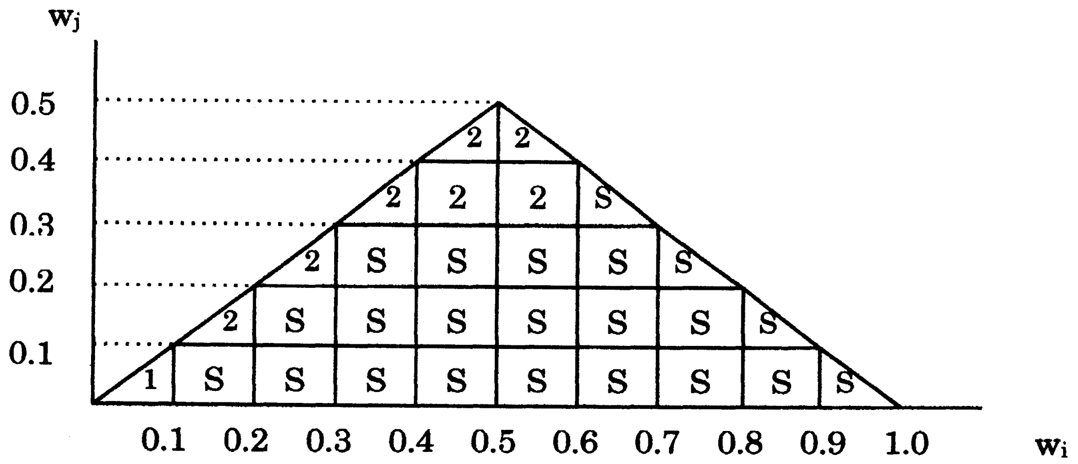

図 5.　$w_i > w_j$ のときの評点値

6．数値例

本節では、以下の数値例をとりあげて、離散化の影響を吟味する。4 節にしたがい、$w_i > w_j$ の関係をもとに、サーティ方式と離散値表（図 5 参照）にもとづいて評点付けする。下記の 3 例に対し、評点を次のように与える。ここに、項目数 n は 4 で、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3 \geqq w_4$ 。

①重みの対が小さい場合、例 1：　$a_{34} = \beta$、　$0.1 > w_2 > 0.05 > w_3$ 。

②重みの対が大きい場合、例 2：　$a_{12} = \gamma$、　$w_2 > 0.4$、$w_3 = w_4$ 。

③ 大きい重みの対と小さい重みの対が混在する場合、例 3：　$a_{34} = \beta$、$a_{12} = \gamma$、$w_2 \geqq 0.4$、$0.05 > w_3$。

例 1　$\{w_i\}$=〔0.9、0.09、0.009、0.001〕のとき、$a_{34} = \beta$ の評点付け

表 1　$a_{34} = \beta$ の評点付け

	①	②	③	④
①	1	9	9	9
②	9^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	β
④	9^{-1}	9^{-1}	β^{-1}	1

表 1A　$\beta = 9$　とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	9	9	9
②	9^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	9
④	9^{-1}	9^{-1}	9^{-1}	1

表 1A はサーティ方式による一対比較値である($\beta = 9$)。固有値解法では、重みは　$\{u_i\}$=〔0.675、0.225、0.075、0.025〕と推定される。評価基準として、偏差平方和が 0.074 であった。通常用いられるサーティの整合性基準では C.I.=　0.444 であったので、この評点付けは整合性を満足しない。

そこで、$\beta = 1$ とする一対比較値を修正する一対比較表（表 1B）を与える。

表１B　$\beta=1$とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	9	9	9
②	9^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	1
④	9^{-1}	9^{-1}	1	1

固有値解法では、重みは
$\{u_i\}=$〔0.711、0.212、0.039、0.039〕
と推定される。評価基準として,偏差平方和が 0.053 であった。表 1A での偏差平方和 0.074 より小さくなったが、C.I.は 0.219 であり、依然としてサーティの整合性基準では認められなかった。

この結果をうけて、表 2 のように a_{23},a_{24}のいずれにも修正することを考える。例１と同じ重みで、$a_{23}=\alpha$、$a_{24}=\alpha$の評点付けを実施する。

表２　$a_{23}=a_{24}=\alpha$の一対比較値

	①	②	③	④
①	1	9	9	9
②	9^{-1}	1	α	α
③	9^{-1}	α^{-1}	1	1
④	9^{-1}	α^{-1}	1	1

$\alpha=1,\cdot\cdot\cdot,9$ に対して、固有値解法を実施した結果、偏差平方和が 0.029 となる $\alpha=2$ が最適となる。そのときの重みの推定は次のとおりである.

$\{u_i\}=$〔0.746、0.117、0.069、0.069〕

C.I.=0.020 となり、サーティの整合性基準は満たされる。

因みに、離散値表（図 2）に基づく評点は$\alpha=1$ に対応する。そのときの偏差平方和、C.I.はそれぞれ 0.035、0.0 である。重みの推定値は、$\{u_i\}=$〔0.750、0.083、0.083、0.083〕である。C.I.=0.0 でサーティの整合性基準では完全整合である。偏差平方和では$\alpha=1$の方が悪いが、$w_1=0.9$ に対して、$\alpha=2$ の $u_1=0.746$ に比較して、$\alpha=1$ の $u_1=0.750$ の方がより良い推定値を得ていることがわかる。

次に、例２をとりあげて、重みの対が大きい場合を考える。

例２　$\{w_i\}=$〔0.5、0.41、0.045、0.045〕のとき、$a_{12}=\gamma$の評点付けを考える。

表２　$a_{12}=\gamma$とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	γ	9	9
②	γ^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	1
④	9^{-1}	9^{-1}	1	1

表２A　$\gamma=1$とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	1	9	9
②	1	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	1
④	9^{-1}	9^{-1}	1	1

表 2A はサーティ方式による一対比較値である($\gamma=1$)。固有値解法では、重みは

$\{u_i\}=$〔0.450、0.450、0.050、0.050〕

と推定される。評価基準として、偏差平方和が 0.004 であった。C.I.=　0.0 であったので、この評点付けは整合性を満足する。表 2B は、離散値表に基づく一対比較値である（$\gamma=2$)。

表 2B　$\gamma=2$ とする一対比較値

		②	③	④
①	1	2	9	9
②	2^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	1
④	9^{-1}	9^{-1}	1	1

固有値解法では、重みは
$\{u_i\}$= 〔0.530、0.372、0.049、0.049〕
と推定される。評価基準として、偏差平方和が 0.001 であった。通常用いられるサーティの整合性基準は C.I.=　0.020 であり、この評点付けは整合性を満足する。

例 2 において、表 2A では、C.I.=0.0 でサーティの整合性基準では完全整合であったが、表 2B では、C.I.は少しだけ大きいが、重みの真値からの偏差平方和では改善される。また、$w_1=0.5$ に対して、$\gamma=1$ の $u_1=0.450$ に比較して、$\gamma=2$ の $u_1=0.530$ の方がより良い推定値を得ている。

次に、例 3 をとりあげて、大きい重みの対と小さい重みの対が混在する場合を考える。

例 3　$\{w_i\}$= 〔0.55、0.4、0.045、0.005〕のとき、$a_{12}=\gamma$、$a_{34}=\beta$ の評点付けを考える。

表 3　$a_{12}=\gamma$、$a_{34}=\beta$ とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	γ	9	9
②	γ^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	β
④	9^{-1}	9^{-1}	β^{-1}	1

表 3A　$\gamma=1$、$\beta=9$ とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	1	9	9
②	1	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	9
④	9^{-1}	9^{-1}	9^{-1}	1

表 3A はサーティ方式による一対比較値である($\gamma=1$、$\beta=9$)。固有値解法では、重みは
$\{u_i\}$= 〔0.436、0.436、0.099、0.030〕
と推定される。評価基準として、偏差平方和が 0.179 であった。通常用いられるサーティの整合性基準では C.I.=　0.219（>0.10）であったので、この評点付けは整合性を満足しない。次いで、離散値表に基づく一対比較値を作成すると、表 3B を得る($\gamma=2$、$\beta=1$)。

表 3B　$\gamma=2$、$\beta=1$ とする一対比較値

	①	②	③	④
①	1	2	9	9
②	2^{-1}	1	9	9
③	9^{-1}	9^{-1}	1	1
④	9^{-1}	9^{-1}	1	1

固有値解法では、重みは$\{u_i\}$=〔0.530、0.372、0.049、0.049〕と推定される。評価基準として、偏差平方和が 0.003 であった。通常用いられるサーティの整合性指標では C.I.= 0.020 であり、この評点付けは整合性を満足する。

以上の結果を整理する。例 1、例 3 では、従来のサーティ方式の評点付けに比較して、離散値表の方が偏差平方和、C.I.基準の意味で良いことがわかる。例 2 では、偏差平方和、C.I.で劣るが、標的となる第 1 項目の重み w_1 に対する良い推定を得ている。

7．おわりに

本稿では、評点化過程に注目して、とくに離散化の影響を考察・吟味した。従来のサーティ方式の評点付けを調整する視点から、重みの大きさに着目することで、評点の有界性と離散性の影響に限局した。本稿では､典型的と考えられる人工的な数値例を与えることで、新たに提案する離散値表の適用に基づく評点付けが有効であることの験証を試みた。比較対照にサーティ方式の評点付けを採用した。その際、評価基準には偏差平方和をとりあげて、C.I.を対照とした。本稿で吟味した数値例は、3例の少数例ではあるが、重みの対が小さい場合、大きい場合を有するときは離散値表に基づく調整が有効であることが示唆された。実践に供するには、重みの大小を分ける境界値、あるいは付与される評点の決定に任意性が残るため､離散値表の作成が恣意的となることは避けられない。今後の課題として、境界値の決定、評点の付与の問題を最適問題として捉える定式化が急がれる。また、付加的ではあるが、重みの推定値の評価基準に、真値からの偏差平方和を採用したが、対照として用いたC.I.が異なる挙動を示したことは興味深い。本稿での数値結果は、実践で頻用されるC.I が真の重み$\{w_i\}$からの偏差を評価するとき必ずしも有用な指標でないことを示唆している。

参考文献

(1) Saaty,T.L.(1980). The Analytic Hierarchy,Process,McGraw Hill,New YorK.

(2) 仁科健、柴山忠雄(1992). 一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質、22,2,115-123.

(3) 小澤正典(2004). AHP における整合度 C.I.値の意味と解釈、OR学会研究部会「AHP の世界」発表資料(2004.9.24).

(4) 田中浩光(2007a). AHP における一対比較値の緩和な整合性指標について、京都大学数理解析研究所講究録 1348,122-129.

(5) 田中浩光(2007b). AHP における整合性診断とテトラッド比、OR学会研究部会「不確実環境下での柔構造モデリング」発表資料(2007.12.22).

(6) 田中浩光(2008a). AHP における一対比較値の整合性診断について、京都大学数理解析研究所講究録 1387、113－122。.

(7) 田中浩光(2008b). AHP における一対比較値の離散化について、日本経営数学会研究発表会予稿集、53-56.

田中 浩光

愛知学院大学経営学部

〒470-0195　愛知県日進市岩崎町阿良池 12

E-mail：htanaka@dpc.aichi-gakuin.ac.jp